

Seminar: Poincaré-Dualität in Charakteristik p

AG Schmidt

Sommersemester 26

ORGANISATION: Donnerstags, 9 – 11 Uhr in SR 8 (Mathematikon).
KONTAKT: Immanuel Klevesath, iklevesath@mathi.uni-heidelberg.de
Alexander Schmidt, schmidt@mathi.uni-heidelberg.de

Übersicht

Ziel des Seminars ist es, Poincaré-Dualität in Charakteristik p mit p -Koeffizienten zu beweisen.

Für ein glattes Schema der Dimension d über einem separabel abgeschlossenen Körper k und $m \in \mathbb{N}$ prim zur Charakteristik von k , induziert das Cupprodukt für alle $s, n \geq 0$ eine perfekte Paarung endlicher abelscher Gruppen:

$$H_{\text{ét}}^s(X, \mu_m^{\otimes n}) \times H_c^{2d-s}(X, \mu_m^{\otimes d-n}) \rightarrow H_c^{2d}(X, \mu_m^{\otimes d}) \xrightarrow[\sim]{Sp} \mathbf{Z}/m.$$

Ist nun $p > 0$ die Charakteristik von k , so wird diese Paarung aus zweierlei Gründen nicht perfekt sein: Zum einen ist die p -kohomologische Dimension von X höchstens d und zum anderen gilt $\mu_{p^r} = 0$ für alle r . Es zeigt sich aber, dass wir dennoch eine perfekte Paarung erhalten, wenn wir die Dimensionen anpassen und $\mu_{p^r}^{\otimes n}$ durch die logarithmischen deRham-Witt-Garben ν_r^n ersetzen. In diesem Fall erhalten wir das folgende

Theorem 1. *Sei X glatt, eigentlich und von Dimension d über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik $p > 0$. Dann existiert für alle $r \geq 1, s \geq 0$ und $0 \leq n \leq d$ eine kanonische Surjektion*

$$H_{\text{ét}}^s(X, \nu_r^n) \rightarrow \text{Hom}(H_{\text{ét}}^{d-s}(X, \nu_r^{d-n}), \mathbf{Z}/p^r).$$

Für $n = 0$ ist diese Abbildung zudem injektiv und es existiert ein kanonischer Isomorphismus

$$H_{\text{ét}}^d(X, \nu_r^d) \xrightarrow{Sp} \mathbf{Z}/p^r.$$

Im Laufe des Seminars werden wir die logarithmischen deRham-Witt-Garben einführen und nach dem Beweis der Poincaré-Dualität Resultate zur Gerstenauflösung und der Dimension der Kohomologiegruppen betrachten, sowie die Zykelklassenabbildung: Schreiben wir

$H_{\text{ét}}^*(X, \nu_r) := \bigoplus_{i=0}^d H_{\text{ét}}^i(X, \nu_r^i)$, so können wir abgeschlossenen Unterschemata von X Kohomologieklassen zuordnen und erhalten so einen Homomorphismus graduerter abelscher Gruppen

$$c : CH^*(X) \rightarrow H_{\text{ét}}^*(X, \nu_r),$$

wobei $CH^*(X)$ die graduierte Chowgruppe von X bezeichne. Dies ersetzt die klassische Abbildung

$$CH^*(X) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^d H_{\text{ét}}^{2i}(X, \mu_m^{\otimes i})$$

für $p \nmid m$.

Vergabe der Vorträge

Wer einen Vortrag halten möchte, melde sich bitte per Mail an mich (Immanuel) mit einer Liste von möglichen Vorträgen, sowie der jeweiligen Präferenz. Um eine Übersicht zu erhalten, welche Vorträge bereits vergeben sind, konsultiere man die Datei in meiner Heibox, die ich versuchen werde, regelmäßig zu aktualisieren. Der Link hierzu ist <https://heibox.uni-heidelberg.de/d/a469c58c56144c6b90d0/>.

Vorträge

Vortrag 1: Einführung – Immanuel (16.4.)

Übersicht über die Beweisstrategie und Hauptaussagen.

Vortrag 2: Logarithmische deRham-Witt-Garben I – Nils (23.4.)

In diesem Vortrag werden die logarithmischen deRham-Witt-Garben $\nu(r)$ eingeführt und erste Eigenschaften gezeigt werden. Dafür ist Abschnitt 1 von [Mil76] zu behandeln. Als ergänzende Quelle kann [Ber81] verwendet werden.

Vortrag 3: Logarithmische deRham-Witt-Garben II (30.4.)

In diesem Vortrag sollen Dualitätssätze für $\nu(r)$ gezeigt werden. Sind Abschnitt 2 von [Mil76] und [Ill79, Thm. 0.2.4.2] zu behandeln. Als ergänzende Quelle kann [Ber81] verwendet werden.

Vortrag 4: Logarithmische deRham-Witt-Garben III (7.5.)

Die Garbe $\nu(r)$ soll ein Pendant zu $\mu_p^{\otimes r}$ sein. Um auch die höheren p -Potenzen abzudecken, muss die Konstruktion ausgedehnt werden. Dafür ist der logarithmische deRham-Witt-Komplex $(W_n \Omega_X^\bullet)_{n \geq 1}$ aus [Ill79] einzuführen. Anschließend sollen [Ill79, I 1.3, 1.13, 1.14] und die Formeln aus [Ill79, I 2.19] gezeigt werden. Als ergänzende Quelle kann [CSS83] verwendet werden. Man beachte, dass es Unterschiede zwischen der französischen $(W_n \Omega_X^r)$ und der amerikanischen Notation (ν_n^r) gibt.

Vortrag 5: Poincaré-Dualität (21.5.)

In diesem Vortrag soll der Beweis der Poincaré-Dualität erfolgen. Zunächst sind die Aussagen [Ill79, 3.5, 5.7.2 und 5.7.5] nachzuholen und im Anschluss soll alles aus [Mil86] bis einschließlich Theorem 1.14 behandelt werden. Große Teile wurden dabei bereits in den vorherigen Vorträgen abgedeckt.

Vortrag 6: Zykelklassenabbildung (28.5.)

Abschnitt 2 aus [Mil86] ist zu behandeln. Als ergänzende Quelle kann [Gro85] verwendet. Weitere zitierte Resultate aus [Ill79], die in [Mil86] verwendet werden, dürfen nach eigenem Ermessen als Blackbox verwendet werden.

Vortrag 7: Dimension der Kohomologiegruppen (11.6.)

Abschnitt 3 aus [Mil86] ist zu behandeln. Weitere zitierte Resultate aus [Ill79], die in [Mil86] verwendet werden, dürfen nach eigenem Ermessen als Blackbox verwendet werden.

Vortrag 8: Gerstenauflösung I (18.6.)

In diesem und dem nächsten Vortrag soll die Gerstenauflösung für die logarithmischen deRham-Witt-Garben gezeigt werden. Hierzu sind zunächst Abschnitte 1 und 2 aus [GS88] zu behandeln.

Vortrag 9: Gerstenauflösung II (25.6.)

Die Exaktheit der Gerstenauflösung soll gezeigt werden. Hierzu ist Abschnitt 3 aus [GS88] zu behandeln.

Vortrag 10: Verbindung zu K -Theorie und motivischer Kohomologie – Morten (2.7.)

References

- [Ber81] P. Berthelot, *Le théorème de dualité plate pour les surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol 868. Springer, Berlin, Heidelberg (1981)
- [CSS83] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc und C. Soulé, *Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux*, Duke Mathematical Journal (1983)
- [Gro85] M. Gros, *Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie de Hodge-Witt logarithmique*, Mémoires de la Société Mathématique de France (1985)
- [GS88] M. Gros und N. Suwa, *La conjecture de Gersten pour les faisceaux de Hodge-Witt logarithmique*, Duke Mathematical Journal (1988)

- [Ill79] L. Illusie, *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (1979)
- [Mil76] J. Milne, *Duality in the flat cohomology of a surface*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (1976)
- [Mil86] J. Milne, *Values of zeta functions of varieties over finite fields*, American Journal of Mathematics (1986)