

**SEMINARPROGRAMM: „KONSTRUKTION VON  
GALOISÜBERLAGERUNGEN MIT HILFE VON STARR-ANALYTISCHER  
VERKLEBUNG“**

OS AG SCHMIDT, WS 2025

Ziel des Seminars ist es zu verstehen, wie man algebraische Kurven mit Hilfe von starr-analytischer Verklebung konstruiert. Wir wollen diese Technik im Beweis der folgenden beiden Theoreme (die von Pop und Harbater bewiesen wurden) verwenden.

**Theorem 1** (Geometrischer Fall der Schafarewitsch-Vermutung). *Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p > 0$ . Dann ist die absolute Galoisgruppe des rationalen Funktionenkörpers  $k(X)$  eine freie pro-endliche Gruppe (vom Rang  $= \text{card}(k)$ ).*

**Theorem 2** (Abhyankars Vermutung (für die affine Gerade)). *Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p > 0$ . Eine endliche Gruppe  $G$  ist genau dann Galoisgruppe einer endlichen étalen Galoisüberlagerung der affinen Gerade  $\mathbb{A}_k^1$ , wenn sie eine quasi- $p$ -Gruppe ist, d.h. wenn sie von ihren  $p$ -Sylowgruppen erzeugt wird.*

Eine gute (wenn auch nicht ganz kurze) Einführung in das Gebiet ist Harbaters Übersichtsartikel [H]. Der deckt allerdings viel mehr ab, als wir im Seminar machen wollen. Man sollte sich also von der Länge des Artikels nicht abschrecken lassen. Eine exzellente Einführung in starr-analytische Geometrie ist Schneiders Übersichtsartikel [Sch]. Wer sich bereits mit komplex-analytischen Räumen beschäftigt hat, wird [BGR] gerne als Referenz nehmen. Eine andere Referenz ist [FP].

## Die Vorträge

### 1. Einführung (Alexander Schmidt)

Eine Erläuterung der Grundideen und der benutzten Techniken.

### 2. Starr-analytische Räume (Alexander Schmidt)

In diesem Vortrag werden starr-analytische Räume eingeführt und die grundlegenden Begriffe dieses Gebietes erläutert. Da vorausgesetzt werden kann, daß das Publikum mit komplexen Mannigfaltigkeiten vertraut ist, werden im wesentlichen die Unterschiede genauer beleuchtet.

### 3. Proendliche Gruppen

In diesem Vortrag sollen Eigenschaften proendlicher Gruppen zusammengesammelt werden. Beweise sollen nur skizziert werden.

-freie proendliche Gruppen [NSW] (3.5.14),

-freie Produkte (endlich vieler) proendlicher Gruppen [NSW] IV §1

-Einbettungsprobleme [NSW], III §5

-projektive proendliche Gruppen [NSW] (3.5.5)

-Satz von Grünberg (projektiv  $\Leftrightarrow$  cd = 1) ([NSW], (3.5.6))

-Iwasawas Kriterium für die Freiheit einer proendlichen Gruppe

*Eine proendliche Gruppe ist genau dann frei über einer Menge der unendlichen Kardinalität  $\alpha$ , wenn sie durch  $\alpha$  viele Elemente topologisch erzeugt wird und jedes endliche Einbettungsproblem  $\alpha$  viele eigentliche Lösungen hat.*

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den abzählbaren Fall (siehe [NSW] (3.5.20), im allgemeinen Fall muß man normale Induktion durch transfinite ersetzen).

-Schließlich zeige man, daß die Fundamentalgruppe einer affinen Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper projektiv ist.

#### 4. Verklebung kompatibler Familien von Galoisüberlagerungen

In diesem Vortrag soll der Inhalt von [P] §1, §2 d.h. die eigentliche Verklebungsprozedur erklärt werden. Das ist im wesentlichen Kombinatorik. Es sollen die Begriffe erklärt werden, die in [P], Prop. 2.6 auftauchen und dieser Satz soll so erläutert werden, daß man versteht, daß er „selbstbeweisend“ ist.

#### 5. Konstruktion von Keimen analytischer Galoisüberlagerungen

In diesem Vortrag werden die lokalen Daten, d.h. geeignete Überlagerungen der analytischen Einheitskreisscheibe konstruiert. Inhalt des Vortrages ist [P], §3, Anfang von „Proof of theorem A“ und „Conclusion A“. Das ist allerdings sehr knapp dargestellt und man sollte unbedingt auf das etwas ausführlichere [1/2] zurückgreifen.

#### 6. Beweis von Theorem 1

In diesem Vortrag soll Theorem 1 bewiesen werden. Hierbei gehe man im Prinzip wie in [P] vor, ersetze aber das modelltheoretische Argument im Beweis von Appendix 2, Lemma, durch ein geometrisches Spezialisierungsargument, wie es z.B. in [H], Proof of Corollary 3.3.5 skizziert ist. Dazu bringe man einen Beweis des Satzes von Bertini-Noether z.B. nach [L], Ch.9, Prop. 5.3.

#### 7. Kreisscheiben und Kreisringe

Zunächst soll, nach [R] 3.3. eine Beschreibung formaler Modelle von leicht vergrößerten Kreisscheiben gegeben werden. Dann werden Prop. 3.4.1, Prop. 3.5.1 loc.cit. ohne Beweis vorgestellt. Schließlich wird definiert, was ein Runge-Paar ist. Wichtig an diesem Vortrag ist die Vermittlung einer geometrischen Intuition, was das Fehlen von Beweisen ausgleichen muß.

#### 8. Reduktionssätze

Einbettungsprobleme mit auflösbarem Kern sind kohomologischen Methoden zugänglich. In diesem Vortrag sollen die Ergebnisse von [Se] und von [R], §4 (wichtig für das weitere sind Cor. 4.2.6, Prop. 4.2.8) erklärt werden.

#### 9. Der starr-analytische Teil des Beweises von Theorem 2

In diesem Vortrag soll Theoreme 2.2.3 aus [R] bewiesen werden. Im Prinzip ist schon alles da aber die Besonderheit liegt jetzt darin, daß die Verklebung nicht entlang voll zerfallender Ränder passiert, sondern die Ränder sind in natürlicher Weise miteinander zu identifizieren

#### 10. Semistabile Kurven und der verbleibende Teil des Beweises von Theorem 2

Um den verbleibenden Teil von Theorem 2 zu zeigen, nutzt man Hebungen nach Charakteristik 0, die (bekannte) Struktur der Fundamentalgruppe dort und Kombinatorik semi-stabiler Kurven. Neben Raynauds Originalartikel [R] ist [Sa] eine gute Referenz.

#### LITERATUR

- [BGR] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert: Non-Archimedean Analysis. Springer Grundlehren 261
- [FP] J. Fresnel, M. van der Put: Géométrie Analytique Rigide et Applications. Progress in Math. vol. 18, Birkhäuser 1981
- [H] D. Harbater: Patching and Galois Theory. Preprint (auf Harbaters Homepage: <http://www.math.upenn.edu/~harbater/patch35.pdf>)
- [L] S. Lang: Fundamentals of Diophantine Geometry. Springer 1983
- [NSW] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg: Cohomology of Number Fields. sec. ed., Springer Grundlehren 323. Online Edition auf A. Schmidts Homepage: <https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~schmidt/NSW2e/>
- [P] F. Pop: Étale covers of affine smooth curves. Invent. math. 120, 555–578 (1995)
- [1/2] F. Pop: 1/2-Riemann existence theorem with Galois action. In Frey und Ritter (eds.): Algebra and Number Theory. de Gruyter Proceedings in Mathematics 1994
- [R] M. Raynaud: Revêtements de la droite affine en caractéristique  $p > 0$  et conjecture d’Abhyankar. Invent. Math. 116 (1994) 425–462
- [Sa] M. Saïdi: Abhyankar’s conjecture II: The use of semi-stable curves. In Bost, Loeser, Raynaud (eds.): Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique. Progress in Math. vol. 187 Birkhäuser 2000
- [Sch] P. Schneider: Basic notions of rigid analytic geometry. In Scholl, Taylor (eds.): Galois Representations in Arithmetic Algebraic Geometry. Cambridge University Press 1998
- [Se] J.-P. Serre: Construction de revêtements étals de la droite affine en caractéristique  $p$ . C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I 311 (1990) 341–346